ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1986

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

La notation $\ell n\ x$ désigne le logarithme népérien de x ou logarithme de base e.

Préliminaires :

1. Etudier la fonction f définie par $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$; construire son graphe ; écrire les développements limités de f à l'ordre 2 au point 1 et au point 0.

2. Montrer que la fonction "f restreinte à l'intervalle $[0, e]$" admet une fonction réciproque φ. Dresser le tableau de variation de φ ; exprimer la dérivée $\varphi'(x)$ au moyen de x et $\varphi(x)$; construire le graphe de φ en plaçant les tangentes aux points remarquables ; trouver le développement limité à l'ordre 2 de φ au point 1.

3. Soit a un nombre réel donné strictement positif ; en utilisant ce qui précède déterminer, suivant les valeurs de a, le nombre de solutions de l'équation $a^x = x$.

I

Dans cette partie, a désigne un nombre donné, compris strictement entre 0 et 1.

On veut étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = a^{u_n} \end{cases}$

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

2. Soit g_1 la fonction définie sur $[0,1]$ par $g_1(x) = a^x$ et g la fonction composée $g = g_1 \circ g_1$. Dresser le tableau de variation de g. En déduire que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, et convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 ; les nombres ℓ_1 et ℓ_2 étant solutions de l'équation :
   (E) $g(x) = x$.
   Que vaut $g(\varphi(a))$?

3. Vérifier que (E) est équivalente à l'équation : $h(x) = 0$ où
   $$h(x) = \ell n\left(\frac{\ell n\ x}{\ell n\ a}\right) - x\ \ell n\ a.$$
   Calculer h' et h". Montrer qu'il existe deux cas, suivant les valeurs de a que l'on précisera :
   - dans le cas ① l'équation (E) a une solution unique sur $[0, 1]$.
   - dans le cas ② la fonction h' a deux zéros sur $[0, 1]$ notés x_1 et x_2 $(x_1 < x_2)$.
     Vérifier les inégalités : $x_1 < \varphi(a) < \frac{1}{e} < x_2$.
     Prouver que l'équation (E) a alors exactement trois solutions sur $[0, 1]$.

4. Pour chacun des cas ① et ② faire un schéma du graphe de g et le placer par rapport à la première diagonale. (On pourra préciser, si on en a le temps, la position du point d'inflexion éventuel du graphe de g).
   Démontrer que dans le cas ① la suite (u_n) converge vers le nombre $\varphi(a)$ et que dans le cas ② la suite (u_n) diverge.

5. Représenter graphiquement la suite (u_n) dans chacun des cas ① et ② en s'aidant du graphe de la fonction g_1. On placera, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, les points M_{2n} de coordonnées (u_n, u_{n+1}) et M_{2n+1} de coordonnées (u_{n+1}, u_{n+1}).

6. On note d_n la distance des points M_n et M_{n+1}. Etudier la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n$. (On laissera de côté le cas $a = e^{-e}$).

II

Pour a, nombre réel strictement positif donné, on définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$v_0 = a,\ v_1 = a^a,\ v_2 = (a^a)^a,\ v_3 = \left((a^a)^a\right)^a \quad \ldots$$

$$v_n = \left(\ldots\left((a^a)^a\right)^a\ldots\right)^a \qquad \text{(n exposants a).}$$

Déterminer la limite de la suite (v_n).